

Теория

1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма. Признаки параллелограмма.
2. Прямоугольник. Свойства прямоугольника. Признаки прямоугольника.
3. Ромб. Свойства ромба.
4. Квадрат. Свойство квадрата.
5. Трапеция. Равнобедренная трапеция. Свойства равнобедренной трапеции.
6. Средняя линия треугольника. Средняя линия трапеции. Теорема Вариньона. Теорема о средних линиях четырехугольника. Теорема о медианах треугольника.
7. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках. Свойство диагоналей трапеции. Свойство биссектрисы треугольника. Обратная теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике.
8. Подобные фигуры. Признаки подобия треугольников.
9. Площадь. Аксиомы площади. Площадь квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника. Свойство медианы треугольника. Площадь ромба, трапеции. Свойство трапеции (крылья бабочки). Признак четырехугольника с параллельными сторонами.
10. Чевиана треугольника. Свойство чевианы. Свойство дельтаплана. Свойство воздушного змея. Отношение площадей треугольников с равными углами. Отношение площадей подобных треугольников.
11. Теорема Пифагора. Обратная теорема Пифагора. Свойство высоты прямоугольного треугольника. Свойство четырехугольника с перпендикулярными сторонами.
12. Касательная. Теорема о касательной. Признак касательной. Свойство отрезков касательных. Свойство центра окружности, вписанной в угол. Свойство четырехугольника, описанного около окружности. Свойства касающихся окружностей. Общие касательные к окружностям.
13. Теорема о вписанной окружности треугольника. Формула для отрезков касательных в треугольнике. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник. Свойство многоугольника, описанного около окружности. Теорема о невписанной окружности треугольника. Свойство невписанной окружности треугольника. Формула радиуса невписанной окружности треугольника. Признак описанного четырехугольника.
14. Свойство диаметра окружности. Теорема о вписанном угле. Свойство углов, опирающихся на одну дугу окружности. Свойство углов вписанного четырехугольника. Свойство угла между касательной и хордой. Признаки вписанного четырехугольника.

Задачи

1. (А) Две стороны четырёхугольника параллельны, а одна из его диагоналей делит другую диагональ пополам. Является ли данный четырёхугольник параллелограммом?
2. (А) Периметр параллелограмма равен 42 см. Найдите его стороны, если
а) их длины относятся как 2 : 5;
б) одна из них больше другой на 3 см.
3. (А) Докажите, что биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.
4. (А) Диагональ параллелограмма разделили на три равные части. Докажите, что полученные точки деления и две другие его вершины образуют ещё один параллелограмм.
5. (Б) Две пары противоположных сторон шестиугольника соответственно параллельны и равны. Докажите, что третья пара его противоположных сторон обладает тем же свойством.
6. (Б) Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили с серединой M его стороны CD . Известно, что угол MAD равен 30° . Докажите, что расстояние от вершины B до прямой AM равно одной из сторон этого параллелограмма.
7. (А) Середины сторон параллелограмма образуют ромб. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.
8. (А) Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC , пересекает сторону AD в точке M , равноудалённой от вершин B и D . Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.
9. (А) Высота ромба делит его сторону на отрезки длины 4 и 1. Найдите площадь этого ромба.
10. (Б) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю от него сторону построили квадрат $ABDE$. Известно, что угол ECA равен 30° . Найдите катет AC , если отрезок CE равен 6.
11. (А) Диагональ равнобедренной трапеции образует с её основаниями угол 45° . Найдите высоту трапеции, если её основания равны 2 и 5.
12. (Б) Одна из диагоналей трапеции равна сумме её оснований и образует с ними углы 60° . Найдите угол между диагоналями этой трапеции.
13. (А) Диагонали четырёхугольника равны. Докажите, что его средние линии перпендикулярны.

14. (Б) Средняя линия четырёхугольника равна половине суммы двух его сторон, не имеющих с ней общих точек. Докажите, что данный четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

15. (А) Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, если её основания равны a и b .

16. (А) Прямая, параллельная основанию треугольника делит две другие его стороны в отношении $5 : 7$, считая от их общей вершины. Найдите отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, если его основание равно 6 .

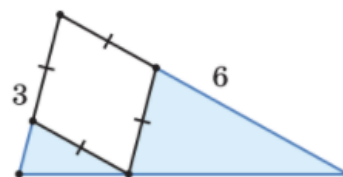
17. (Б) Точки E и K — середины сторон AD и CD параллелограмма $ABCD$.

Отрезки CE и BK пересекаются в точке O . Найдите отношение $CO : OE$.

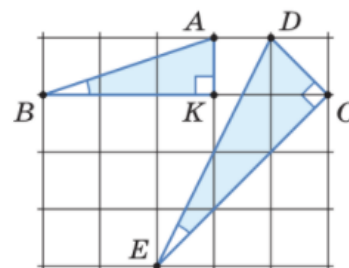


18. (А) Человек двухметрового роста измерил свою тень от уличного фонаря. Она оказалась равной 1 метру. Потом он измерил расстояние до фонарного столба — оно оказалось равно 4 метра. Какова высота фонаря?

19. Из треугольника вырезали ромб так, как показано на рисунке. Найдите сторону ромба, если боковые стороны треугольника равны 3 и 6 .



20. (А) Докажите, что углы ABC и CED , показанные на клетчатой бумаге, равны.



21. (А) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M . На прямой BM выбрана точка K , так что M является серединой отрезка BK . Докажите, что треугольник MCK подобен треугольнику, образованному медианами треугольника ABC .

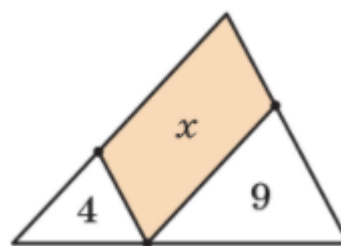
22. (А) Жилая комната имеет размер 4 м \times 6 м, а её высота равна 3 м. Высота дверного проёма 210 см, а его ширина 95 см. В комнате есть окно размером 150 см \times 200 см. Какое наименьшее число рулонов обоев нужно для оклейки стен этой комнаты, если полотно в рулоне имеет ширину $0,5$ м, а его длина равна 10 м?

23. (А) Прямая делит одну сторону треугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$, считая от их общей вершины. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

24. (А+) Вершину трапеции соединили с серединой её противоположной боковой стороны. Известно, что полученный отрезок делит её площадь в отношении $2 : 5$. Найдите отношение оснований трапеции.

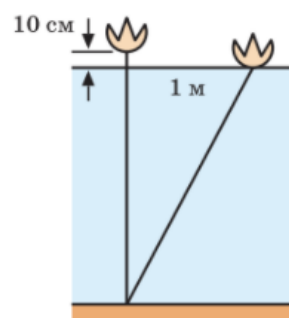
25. (А) Две высоты параллелограмма равны 3 и 5. Найдите площадь параллелограмма, если один из его углов равен 30° .
26. (А) Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что площадь такого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей.
27. (Б) Середину стороны четырёхугольника соединили с противоположными вершинами. Оказалось, что площадь полученного треугольника составляет половину его площади. Докажите, что две стороны этого четырёхугольника параллельны.
28. (Б) Площадь треугольника ABC равна 1. На его сторонах BC и AC взяли точки K и M так, что $AM : CM = 1 : 2$, $BK : CK = 1 : 3$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника BOK .
29. (Б) Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника. Площади двух из них, прилегающих к её основаниям, равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.
30. (Б) Стороны треугольника равны 4, 5 и 6. Основания трёх его биссектрис образуют новый треугольник. Найдите отношение площадей этих треугольников.

31. (Б) Треугольник разрезали на параллелограмм и два треугольника, площади которых равны 4 и 9. Найдите площадь параллелограмма.

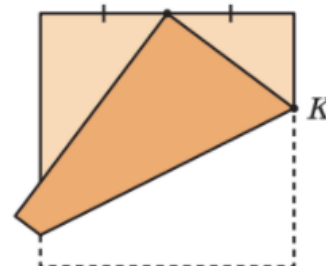


32. (А) Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника до трёх его сторон всегда одинакова.
33. (А) Стороны треугольника равны 5, 5 и 6. Найдите его площадь.
34. (А) Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 21, а боковые стороны — 10. Найдите диагональ трапеции.

35. (А) Цветок лотоса возвышается над поверхностью озера на 10 см. А если его потянуть за стебель, он коснётся воды в метре от своего прежнего положения. Определите глубину озера в данном месте.



36. (А) Бумажный квадрат перегнули так, что одна его вершина оказалась в середине противоположной стороны. В каком отношении точка K , лежащая на линии сгиба, делит сторону квадрата?
37. (Б) Меньшее основание трапеции равно 3. Диагонали перпендикулярны друг другу, а высота, опущенная из



- её вершины, делит другое основание на отрезки с длинами 1 и 9. Найдите высоту трапеции.
38. (А) В окружности провели две хорды AB и BC , равные радиусу этой окружности. Найдите угол ABC .
39. (А) Радиус окружности равен 1. Найдите площадь квадрата, две вершины которого лежат на этой окружности, а две другие на её диаметре.
40. (Б) В трапеции $ABCD$ основание AD в 2 раза больше основания BC . Точку O взяли так, что углы ABO и DCO равны 90° . Докажите, что $AO = DO$.
41. (Б) На сколько километров удалена от человека, стоящего на берегу моря, линия горизонта? (Средний рост человека — 1,7 м, радиус Земли — 6400 км.)
42. (А) Две окружности вписаны в угол 60° , причём одна из них проходит через центр другой. Найдите отношение их радиусов.
43. (Б) Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом, а также одной прямой в точках A и B . Найдите длину отрезка AB .
44. (А?) Длины боковых сторон трапеции 5 и 7, а её средняя линия равна 6. Докажите, что биссектрисы всех углов этой трапеции пересекаются в одной точке.
45. (Б) Через центр вписанной окружности треугольника параллельно его стороне провели прямую. Она отсекала от данного треугольника меньший треугольник. Найдите его периметр, если длины сторон, которые пересекла данная прямая, равны a и b .
46. (А) Треугольник вписан в окружность. Радиус этой окружности, проведённый в вершину тупого угла треугольника, образует с двумя его сторонами, выходящими из этой вершины, углы 50° и 70° . Найдите углы треугольника.
47. (А) В окружность вписан равнобедренный треугольник. Из точки этой окружности основание треугольника видно под углом 50° . Под какими углами из данной точки видны боковые стороны этого треугольника?
48. (А) В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Известно, что его углы при вершинах B и D равны 120° и 130° . Найдите угол ACE .
49. (А) Через точки пересечения двух окружностей провели две произвольные прямые. Они пересекают первую окружность в точках A и B , а вторую — в точках C и D . Докажите, что прямые AB и CD параллельны так, как показано на рисунке.

